Clasa a III-a				
Nr. sub Variantă	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
TOTAL puncte				

Clasa a IV-a					
Nr. sub Variantă	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
TOTAL puncte					

Clasa a V-a					
Nr. sub / Variantă	A	B	C	D	E
1	■				
2				■	
3			■		
4		■			
5				■	
6				■	
7	■				
8			■		
9		■			
10				■	
11		■			
12		■			
13				■	
14					■
TOTAL puncte					

Clasa a VI-a					
Nr. sub / Variantă	A	B	C	D	E
1		■			
2				■	
3			■		
4		■			
5		■			
6		■			
7			■		
8			■		
9				■	
10		■			
11				■	
12			■		
13			■		
14			■		
TOTAL puncte					

Clasa a VII-a					
Nr. sub / Variantă	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
TOTAL puncte					

Clasa a VII-a

1 Determinați numerele naturale nenule x și y care verifică relația $x^2 + y^2 = x + y + xy$.

Gazeta Matematică

Rezolvare: $x^2 + y^2 = x + y + xy \,/\cdot 2 \quad \Rightarrow$ 2p

$2x^2 + 2y^2 = 2x + 2y + 2xy \,/+2$ 2p

$(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 6p

$(x-1)^2 \leq 2$ *și* $(y-1)^2 \leq 2$ 2p

$x \leq \sqrt{2} + 1$ *și* $y \leq \sqrt{2} + 1$ 2p

$x \in \{1,2\}$ *și* $y \in \{1,2\}$ 3p

Se verifică $(x,y) \in \{(1,2);(2,2);(2,1)\}$ 3p

Concurs „Discipolii lui Lazăr" - 2016

Clasa a VII-a

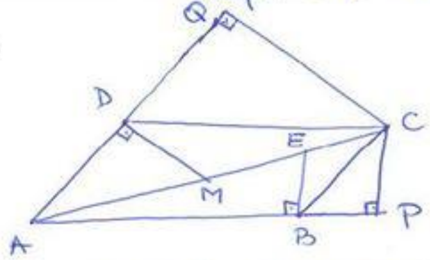
Se consideră paralelogramul ABCD cu $\widehat{A}=60°$. Perpendicularele în B pe AB și în D pe AD intersectează dreapta AC în E, respectiv M. Paralela prin C la BE intersectează dreapta AB în P.

a) Arătați că $BE=\frac{2AB}{2AB+BC}\cdot CP$;

b) Demonstrați că $DM=BE$ dacă și numai dacă ABCD este romb.

Prof. Gh. Bumbăcea, Bușteni

Soluție.



a) Aplicăm TFA în $\triangle ACP$ și rezultă $\frac{BE}{CP}=\frac{AB}{AP}$ (1)

În $\triangle BCP$, $\widehat{P}=90°$, $\widehat{C}=30°$ $\Rightarrow BP=\frac{BC}{2}$. Avem $AP=AB+BP=$
$=AB+\frac{BC}{2}=\frac{2AB+BC}{2}$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow$ relația din enunț.

b) Analog construim $CQ\perp AD$ și obținem

$$DM=\frac{2AD}{2AD+DC}\cdot CQ$$

Avem $\frac{DM}{BE}=\frac{2AD}{2AD+DC}\cdot\frac{2AB+BC}{2AB}\cdot\frac{CQ}{CP}$ și cum $AD=BC$, $AB=DC$ deducem că

$$\frac{DM}{BE}=\frac{2AB+BC}{AB+2BC}\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{CQ}{CP}\quad(3)$$

$\triangle BPC\sim\triangle DQC$ (U.U.) $\Rightarrow\frac{BC}{DC}=\frac{CP}{CQ}\Rightarrow\frac{BC}{AB}=\frac{CP}{CQ}$ (4)

Din (3) și (4) $\Rightarrow\frac{DM}{BE}=\frac{2AB+BC}{AB+2BC}$

$DM=BE\iff\frac{DM}{BE}=1\iff 2AB+BC=AB+2BC\iff$
$\iff AB=BC\iff ABCD$ - romb.

Clasa a VIII-a					
Nr. sub / Variantă	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
TOTAL puncte					

II. Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete.

SOLUTIA

1. Fie $a, b \in \boldsymbol{R}$, cu $a, b \geq 0$ astfel încât: $a+b=2$. Arătaţi că:
   i) $ab \leq 1$
   ii) $\sqrt{a+2^{ab}}+\sqrt{b+2^{ab}} \leq 2\sqrt{3}$.

Dinu Teodorescu

Soluția::

i) din inegaitatea dintre media geometrică și media aritmetică avem: $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2=1$ **5p**

ii) din inegaitatea dintre media aritmetică și media pătratică, avem:

$$\sqrt{a+2^{ab}}+\sqrt{b+2^{ab}} \leq 2\sqrt{\frac{a+2^{ab}+b+2^{ab}}{2}}=2\sqrt{\frac{2+2\cdot 2^{ab}}{2}}=2\sqrt{1+2^{ab}} \leq 2\sqrt{3},$$ **15p**

(se folosește $ab \leq 1$ de unde $2^{ab} \leq 2$)

SOLUTIA autorului: Se aplica inegalitatea Cauchy

$(ux+vy)^2 \leq (u^2+v^2)(x^2+y^2)$ cu

$u=v=1$ si $x=\sqrt{a+2^{ab}}$, $y=\sqrt{b+2^{ab}}$ si se obtine

$$\left(\sqrt{a+2^{ab}}+\sqrt{b+2^{ab}}\right)^2 \leq (1+1)\left(a+2^{ab}+b+2^{ab}\right)=$$

$$2\left(2+2^{ab+1}\right)=4+2^{ab+2} \leq 4+2^{\frac{(a+b)^2}{4}+2}=12 \Rightarrow \sqrt{a+2^{ab}}+\sqrt{b+2^{ab}} \leq 2\sqrt{3}$$

2. Fie VABC o piramidă triunghiulară regulată de bază ABC şi un punct Q în planul bazei ABC.

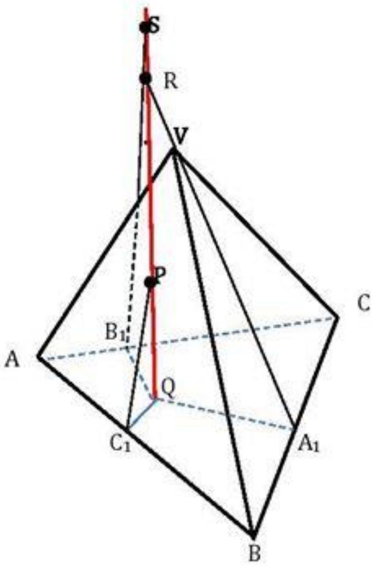
a) Demonstraţi că suma distanţelor de la Q la laturile triunghiului ABC este constantă.

b) Perpendiculara în Q pe planul (ABC) intersectează planele feţelor ABV, ACV şi BCV în punctele P, R şi respectiv S. Să se demonstreze că: QP +QR +QS = constant.

* * *

a) $\mathcal{A}_{ABC} = {}_{AQB} + \mathcal{A}_{BQC} + \mathcal{A}_{AQC} \Rightarrow \frac{AB\cdot QC_1}{2} + \frac{BC\cdot QA_1}{2} + \frac{AC\cdot QB_1}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{2} \,|:\frac{l}{2}$

$QA_1 + QB_1 + QC_1 = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ = constant 5p



Piramida regulată are diedrele formate de feţele laterale cu baza congruente. 3p

Fie A_1, B_1, C_1 proiecţiile lui Q pe BC, AC şi respectiv AB. Cf T3p $RA_1 \perp BC$, $SB_1 \perp AC$, $PC_1 \perp AB$, 3p

$\Rightarrow$ unghiurile A_1, B_1, C_1, sunt unghiurile plane ale celor trei triedre. Fie u măsura lor. 3p

$QP = QC_1 \cdot \mathrm{tg}u$, $QR = QA_1 \cdot \mathrm{tg}u$, $QS = QA_1 \cdot \mathrm{tg}u$,

$\Rightarrow$ QP +QR +QS = $\mathrm{tg}u\,(QA_1 + QB_1 + QC_1)$ 3p

şi cum $QA_1 + QB_1 + QC_1 = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ = constant, relaţia este demonstrată. 3p